Série 1

Exercice 1 :

Dans un repère R fixe, muni d'une base orthonormée directe ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), On considère les deux vecteurs suivants :

$\vec{v} = 2\,t\,\vec{i} + t\,\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{w} = 4\,t\,\vec{i} - t\,\vec{j} - \vec{k}$ où t est le temps.

1°) En utilisant les propriétés de dérivée vectorielle, calculer $\frac{d(\vec{v}.\vec{w})}{dt}$ et $\left(\frac{d(\vec{v}\wedge\vec{w})}{dt}\right)_R$

Exercice 2 :

Dans un repère orthonormé direct $\Re(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs :

$$\vec{v}_1 = 3\vec{i} + 3\vec{j}\ ,\ \vec{v}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}\ ,\ \vec{v}_3 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \text{ et } \vec{v}_4 = 2\vec{i} - \vec{k}$$

1. Représenter les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

2. Calculer $\|\vec{v}_1\|$, $\|\vec{v}_2\|$ et les produits $\vec{v}_1.\vec{v}_2$ et $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$.

3. Calculer l'angle formé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

4. Montrer que le vecteur $\vec{v}_3$ est perpendiculaire au plan (P) formé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

5. Montrer que le vecteur $\vec{v}_4$ appartient au plan (P)

6. Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$

7. Calculer le produit mixte $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ et montrer qu'il est invariant par permutation circulaire.

Exercice 3 :

On considère dans le plan xOy deux vecteurs unitaires perpendiculaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tournant autour de l'axe (Oz). Soit $R(O,x,y,z)$ un repère muni de la base O.N.D $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. En posant $(\vec{Ox}, \vec{u}) = \theta$ ($\theta = \omega t$, ω est une constante). Soit $\vec{r} = \cos bt\,\vec{i} + \sin bt\,\vec{j} + t^2\vec{k}$ une fonction vectorielle et $\lambda(t) = e^{-at}$ une fonction scalaire (a et b sont des constantes)

1. Exprimer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2. Déterminer le vecteur $\vec{w}$, tel que le système $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ constitue une base O.N.D

3. Calculer $\left.\frac{d\vec{u}}{d\theta}\right|_R$ et $\left.\frac{d\vec{v}}{d\theta}\right|_R$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ puis dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

4. Calculer $\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_R$ et $\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_R$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ puis dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

5. Calculer $\left.\frac{d(\lambda\,\vec{r})}{dt}\right|_R$ et $\left.\frac{d(\vec{u}\wedge\vec{r})}{dt}\right|_R$ dans les bases $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exercice 4 :

Soit un vecteur $\vec{v}$(t) de module V et un référentiel R.

1°) Peut-on dire que le module de la dérivée de $\vec{v}\,(t)$ est égale à la dérivée du module de $\vec{v}$(t) ?

2°) Montrer que si $\vec{v}$(t) a un module constant, le vecteur dérivé $\left(\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right)_R$ lui est orthogonal.

3°) Montrer que, d'une manière générale : $\vec{v}$(t) . $\left(\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right)_R$ = V $\frac{dV}{dt}$